Mention légales

- Éditeur
  LECARPENTIER Jean-François avenue d'Agde 34810 Pomérols
- Siret 80383013200012
- Code ISBN : 9781707493623
- Dépôt légal décembre 2019
- Imprimé à la demande par AMAZON
- Contact : **contact-info@maths-lycee.fr**

Table des matières

Préface

Cet ouvrage permet aux élèves de première spécialité mathématiques **de se familiariser avec les notions essentielles du programme 2019**.

Il a été conçu dans le but **de revoir et appliquer directement chaque notion au programme** de première sur des exemples simples en tenant compte des difficultés rencontrées le plus souvent chez les élèves de première.

Les vidéos associées aux exercices d'application permettent une approche plus ludique et d'avoir des explications complémentaires à celles de la version écrite d'un exercice.

Vous aurez accès aux exercices plus complets et de recherche sur le site MATHS-LYCEE.FR associé à ce livre.

A lire impérativement avant de commencer

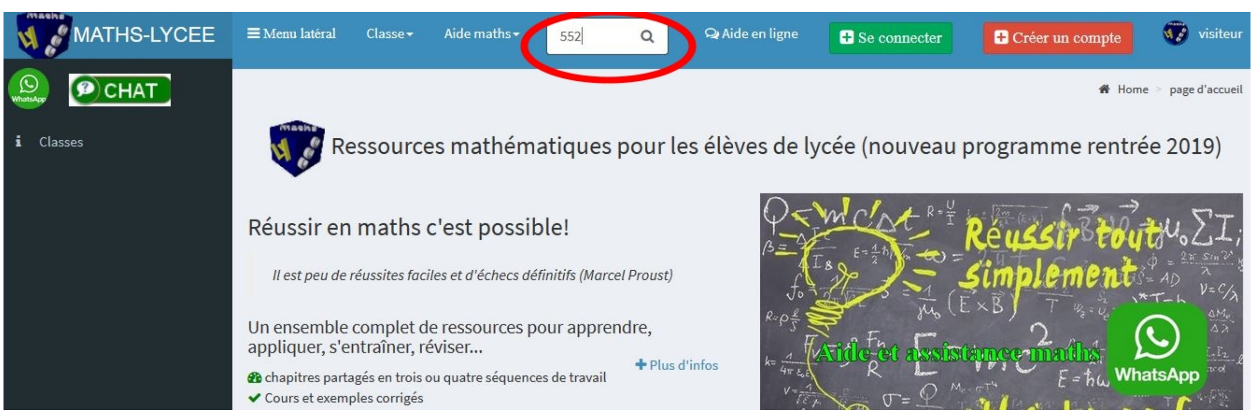
MODE d'emploi et liens vidéos

Pour chaque section, vous trouverez un rappel de cours et un ou plusieurs exercices d'application directe du cours.

Les **références des vidéos** permettent d'accéder directement à la vidéo (utilisation du document PDF) ou bien d'accéder à la vidéo avec sa référence (version imprimée).

Accès à une vidéo avec sa référence :

- ❏ lien sur le site MATHS-LYCEE.FR
- ❏ Pour accéder directement à la vidéo avec sa référence, taper le numéro de la vidéo dans la barre de recherche :



Chapitre 1

Second degré

Sommaire

1.1 Forme canonique

Mémo : variations

P est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique de P avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

réf 639-Déterminer la forme canonique

Exercice 1 déterminer la forme canonique connaissant la fonction

Pour chacun des cas ci-dessous, f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Donner les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$ puis donner la forme canonique de f.

1. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$

Solution:

$f(x) = 3x^2 + 12x + 5$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 12$ et $c = 5$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{6} = -2$

$\beta = f(\alpha) = 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) + 5 = 12 + 24 + 5 = 41$

$\boxed{\text{Le sommet de } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } S(-2;41)}$

$\boxed{\text{La forme canonique de } f \text{ est } f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 3(x+2)^2 + 41}$

$x = \alpha = x - (-2) = x + 2$

2. $f(x) = 2x^2 - 16x + 7$

Solution:

$f(x) = 2x^2 - 16x + 7$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -16$ et $c = 7$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{4} = 4$ $\quad b = -16$ donc $-b = +16$

$\beta = f(\alpha) = f(4) = 2 \times 4^2 - 16 \times 4 + 7 = 32 - 64 + 7 = -25$

$\boxed{\text{Le sommet S de } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } S(4;-25)}$

$\boxed{\text{La forme canonique de } f \text{ est } f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-4)^2 - 25}$

3. $f(x) = -10x - x^2 + 1$

☛ **Solution**:

les termes de $f(x)$ ne sont pas ordonnés selon les puissances décroissantes de x
Commencer par écrire $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$ et identifier les coefficients a, b et c
$f(x) = -10x - x^2 + 1 = -x^2 - 10x + 1$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -10$ et $c = 1$
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{10}{-2} = -5$
$\beta = f(\alpha) = f(-5) = -(-5)^2 - 10 \times (-5) + 1 = -25 + 50 + 1 = 26$

Le sommet S de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $S(-5; 26)$

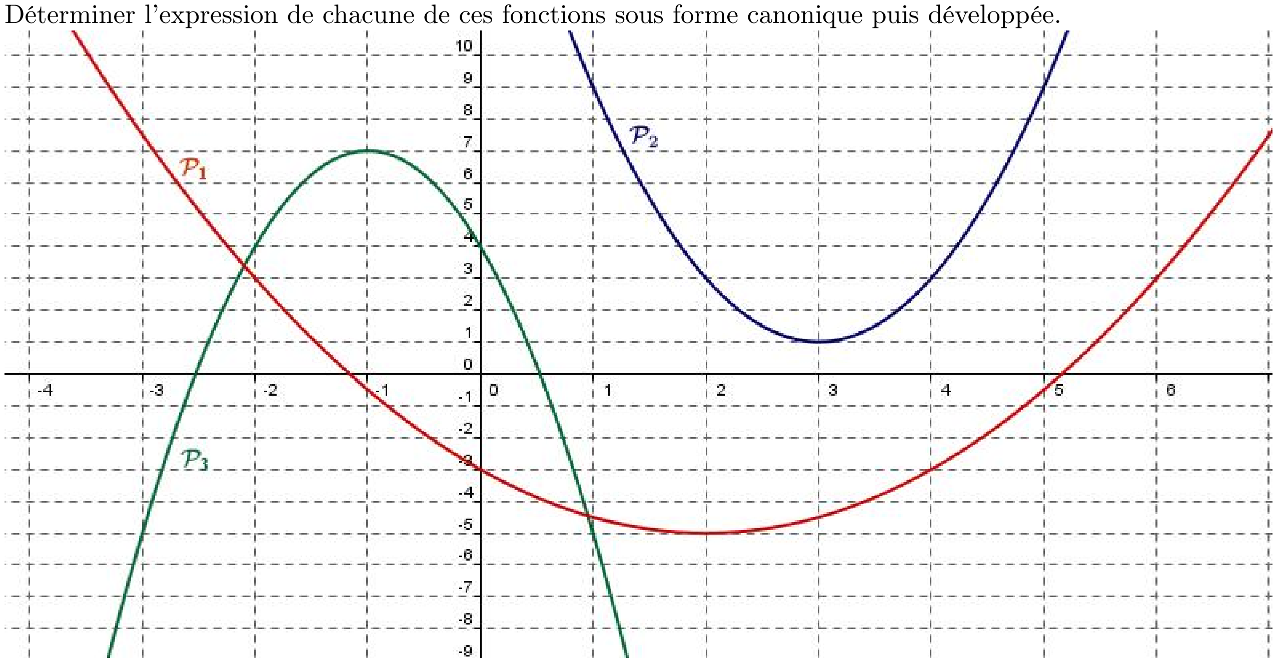
La forme canonique de f est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = -(x + 5)^2 + 26$

$\alpha = -5$ donc $x - \alpha = x - (-5) = x + 5$

réf 641-Déterminer la forme canonique à partir du graphique

Exercice 2 déterminer la forme canonique connaissant la parabole

On donne ci-dessous les représentations graphiques $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ respectivement des fonctions polynôme de degré 2 f_1, f_2 et f_3.
Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions sous forme canonique puis développée.



1. Pour f_1 :

☛ **Solution**:

On pose $f_1(x) = a_1(x - \alpha_1)^2 + \beta_1$

Pour la parabole $\mathcal{P}_1$, on a $a_1 > 0$ (parabole orientée vers le haut) et le sommet S_1 a pour coordonnées $(2; -5)$

On a donc $\alpha_1 = 2$ et $\beta_1 = -5$

donc $f_1(x) = a_1(x - 2)^2 - 5$

La parabole $\mathcal{P}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0; -3)$ par exemple

donc $f_1(0) = -3$

donc $f_1(0) = a_1(0 - 2)^2 - 5 = -3$ (on remplace $x$par 0 dans l'expression de $f1$)

$a_1(0 - 2)^2 - 5 = -3 \Longleftrightarrow 4a_1 = 2 \Longleftrightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}$

$f_1(x) = \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 - 5$

$= \dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 5$

$= \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 - 5$

$= \dfrac{x^2}{2} - 2x - 3$

$$\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5 = \frac{x^2}{2} - 2x - 3}$$

1.2 Variations

Mémo : variations

P est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

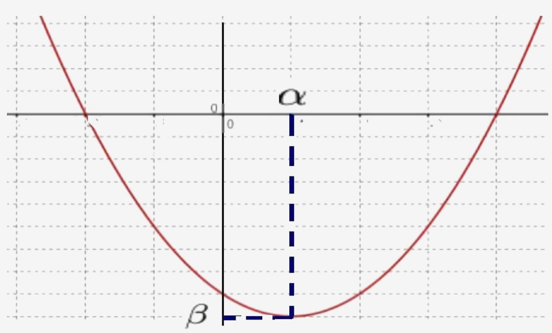
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha;\beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
On a alors deux cas possibles $a > 0$ et $a < 0$:

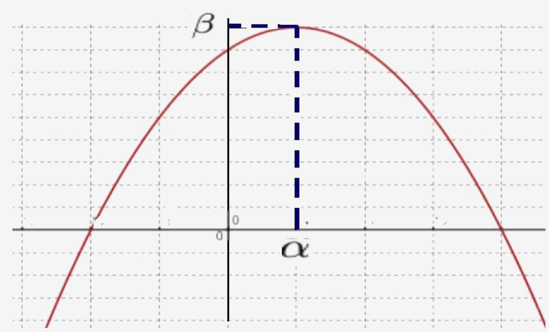
Cas a>0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Cas a<0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$





réf 640-sommet de la parabole et tableau de variation

Exercice 3 dresser le tableau de variation connaissant la fonction

Pour chacun des cas ci-dessous, f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathbb{P}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Dresser le tableau de variation de f

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

☛ **Solution**:

$f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -8$ et $c = 1$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{4} = 2$

$\beta = f(\alpha) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$

La forme canonique de f est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-2)^2 - 7$ et le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(2;-7)$

$\boxed{\text{Le sommet S de } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } S(2;-7)}$

Le coefficient a de x^2 est positif donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty;2[$ et croissante sur $]2;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

2. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

☛ **Solution**:

$f(x) = -3x^2 + 6x - 2$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = 6$ et $c = -2$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-6} = 1$

$\beta = f(\alpha) = f(1) = -3 + 6 - 2 = 1$

La forme canonique de f est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -3(x-1)^2 + 1$ et le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(1;1)$

$\boxed{\text{Le sommet S de } \mathcal{P} \text{ a pour coordonnées } S(1;1)}$

Le coefficient a de x^2 est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. $f(x) = 10x + 3 - 2x^2$

☛ **Solution**:

$f(x) = 10x + 3 - 2x^2 = -2x^2 + 10x + 3$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 10$ et $c = 3$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{-4} = \dfrac{5}{2}$

$\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -2 \times \dfrac{25}{4} + 10 \times \dfrac{5}{2} + 3 = \dfrac{-25}{2} + 25 + 3 = \dfrac{31}{2}$

La forme canonique de f est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{31}{2}$ et le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{31}{2}\right)$

Le sommet S de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $S\left(\frac{5}{2};\frac{31}{2}\right)$

Le coefficient a de x^2 est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;\frac{5}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{5}{2};+\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{31}{2}$	$\searrow$

1.3 Racines

1.3.1 Discriminant et racines

Mémo : racine

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), x_1 est une racine de P si et seulement si $P(x_1) = 0$

Mémo : discriminant-racines

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Le nombre réel noté $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de P.

- Si $\Delta > 0$ il y a deux racines
  $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ il n'y a aucune racine

Exercice 4 : Déterminer les racines de chaque polynôme si elles existent

Déterminer si elles existent, les racines des polynômes de degré 2 ci-dessous :

1. $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Solution:

Ici, on a $a = 2$, $b = -4$ et $c = -6$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{64}}{4} = \dfrac{4-8}{4} = -1$
et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+\sqrt{64}}{4} = \dfrac{4+8}{4} = 3$

Les racines de $P(x)$ sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

Remarque

Cela signifie que $P(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$ et que $P(3) = 0$
Quand le coefficient b est négatif, attention à bien écrire $(b)^2$
En effet $-4^2 = -16$ mais $(-4)^2 = +16$ (la deuxième écriture est correcte pour le calcul de Δ)
Penser à vérifier les calculs avec le MENU EQUATION de la calculatrice

2. $P(x) = -3x^2 + 5x - 3$

☛ **Solution**:

Ici, on a $a = -3$, $b = 5$ et $c = -3$
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 25 - 36 = -11$
$\Delta < 0$ donc $P(x)$ n'admet pas de racines.

$\boxed{P(x) \text{ n'admet aucune racine. } (\Delta < 0)}$

3. $P(x) = 12x - 2x^2 - 18$

☛ **Solution**:

⚠ les termes ne sont pas ordonnés selon les puissances décroissantes de x.
On a donc $P(x) = -2x^2 + 12x - 18$
Ici, on a $a = -2$, $b = 12$ et $c = -18$
$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times (-2) \times (-18) = 144 - 144 = 0$
$\Delta = 0$ donc $P(x)$ n'admet qu'une seule racine (racine double).
$x_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{-4} = 3$

$\boxed{P(x) \text{ admet pour racine } x_1 = 3.}$

1.3.2 Somme et produit des racines

Mémo : somme et produit des racines

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Si le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 alors $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

Remarque
Si la somme des coefficients est égale à 0 alors $x_1 = 1$ est une racine du polynôme.

réf 605 produit des racines

Exercice 5 utiliser le produit des racines

1. Déterminer les racines de $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ sans calculer le discriminant.

☛ **Solution**:

On a $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$ donc $a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0$
donc $P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$
donc $x_1 = 1$ est une racine de P.
$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ soit $1x_2 = \dfrac{2}{3}$
donc $x_2 = \dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \dfrac{2}{3}.}$

2. En remarquant que $x_1 = 2$ est une racine de $P(x) = 2x^2 - 500x + 992$, déterminer les racines de P.

☛ **Solution**:

$P(2) = 2 \times 2^2 - 500 \times 2 + 992 = 8 - 1000 + 992 = 0$
donc $x_1 = 2$ est une racine de P.
$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $2x_2 = \dfrac{992}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{992}{2 \times 2} = \dfrac{992}{4} = 248$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 248.}$

1.3.3 Cas où le calcul du discriminant est inutile

Mémo : cas où l'on peut éviter le calcul de Δ

- ❏ cas où $b = 0$
  On peut "isoler" x^2 : $ax^2 + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{-c}{a}$
- ❏ Cas où $c = 0$
  On peut factoriser x : $ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax + b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $ax + c = 0$
- ❏ Cas où l'on peut trouver une racine "simple" (voir section précédente)
  On utilise $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

réf 605-racines sans calculer le discriminant

Exercice 6 : recherche des racines sans calculer Δ

Déterminer si elles existent, les racines des polynômes de degré 2 sans calculer le discriminant (Δ)

1. $P(x) = 2x^2 - 18$

☛ **Solution**:

On est dans le cas où $b = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 18 = 0 &\iff 2x^2 = 18 \\ &\iff x^2 = 9 \\ &\iff x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9} \\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } x_1 = 3 \text{ et } x_2 = -3.}$

2. $P(x) = 3x^2 + 8$

☛ **Solution**:

On est dans le cas où $b = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8 = 0 &\iff 3x^2 = -8 \\ &\iff x^2 = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

$x^2 \geq 0$ donc cette équation n'admet aucune solution.

$\boxed{P \text{ n'admet aucune racine.}}$

3. $P(x) = -2x^2 + 8x$

☛ **Solution**:

On est dans le cas où $c = 0$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x = 0 &\iff x(-2x + 8) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } -2x + 8 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

$\boxed{P \text{ admet donc deux racines } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 4.}$

4. $P(x) = x^2 - 4x + 3$

☛ **Solution**:

On a $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$
et la somme des coefficients de $P(x)$ est égale à 0.
donc $P(1) = a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$
donc $x_1 = 1$ est une racine de $P(x)$
Si on note x_2 la seconde racine de $P(x)$, on a alors :
$x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = 3$ donc $x_2 = 3$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 3}$

1.3.4 Équations

Méthode : résolution d'une équation du second degré

- Il faut avoir 0 dans le membre de gauche
- Développer et simplifier pour se ramener à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$
- rappel : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ($b \neq 0$ et $d \neq 0$) $\Longleftrightarrow ad = bc$ (produits en croix égaux)

réf 607-équations du second degré

Exercice 7 : équations simples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

penser à contrôler les résultats avec la calculatrice

1. $2x^2 - 6x = -7$

Solution:

$2x^2 - 6x = -7 \Longleftrightarrow 2x^2 - 6x + 7 = 0$
Ici, on a $a = 2$, $b = -6$ et $c = +7$
$\Delta < 0$ donc il n'y a aucune solution

$\boxed{S = \oslash}$

2. $(2x - 1)^2 = 5 - 4x$

Solution:

$(2x - 1)^2 = 5 - 4x$
$\Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5 - 4x$
$\Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 5 + 4x = 0$
$\Longleftrightarrow 4x^2 - 4 = 0$
$\Longleftrightarrow x^2 = 1$
$\Longleftrightarrow x = \sqrt{1} = 1$ ou bien $x = -\sqrt{1} = -1$
Les solutions de l'équation sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$

$\boxed{S = \{-1 \;\; ; \;\; 1\}}$

3. $(2x+1)^2 = 1-(3x+2)^2$

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 = 1-(3x+2)^2 &\iff 4x^2+4x+1 = 1-(9x^2+12x+4)\\ &\iff 4x^2+4x+1 = 1-9x^2-12x-4\\ &\iff 4x^2+4x+1-1+9x^2+12x+4=0\\ &\iff 13x^2+16x+4=0\end{aligned}$$

Ici $a=13$, $b=16$ et $c=4$

$\Delta = b^2-4ac = (16)^2-4\times 13\times 4 = 48$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16-\sqrt{48}}{26} = \dfrac{-16-\sqrt{16\times 3}}{26} = \dfrac{-16-4\sqrt{3}}{26} = \dfrac{4(-4-\sqrt{3})}{26}$

soit $x_1 = \dfrac{2(-4-\sqrt{3})}{13} = \dfrac{-8-2\sqrt{3}}{13}$

et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16+\sqrt{48}}{26} = \dfrac{-16+4\sqrt{3}}{26} = \dfrac{-8+2\sqrt{3}}{13}$

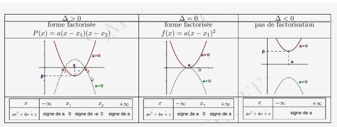
Les solutions de l'équation sont $x_1 = \dfrac{-8-2\sqrt{3}}{13}$ et $x_2 = \dfrac{-8+2\sqrt{3}}{13}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-8-2\sqrt{3}}{13}\ ;\ \frac{-8+2\sqrt{3}}{13}\right\}}$$

Penser à vérifier les solutions avec le MENU EQUATION de la calculatrice.

1.4 Signe-inéquations

Mémo signe de ax^2+bx+c



1.4.1 Tableau de signes d'un polynôme de degré 2

réf 643- signe de ax^2+bx+c

Exercice 8 : signe d'un polynôme de degré 2

Etudier le signe des polynôme de degré 2

1. $3x^2 - 4x + 1$

☛ **Solution**:

Ici on a $a = 3$, $b = -4$ et $c = 1$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$
et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{6} = 1$
Etude du signe de $3x^2 - 4x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$ signe de a=3	0	$-$ signe de $-$a=-3	0	$+$ signe de a=3	

$3x^2 - 4x + 1$ est positif sur $]-\infty; \frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$ et négatif sur $]\frac{1}{3}; 1[$

Remarque
On pouvait éviter de calculer Δ.
La somme des coefficients est nulle, $a + b + c = 0$
donc $x_1 = 1$ est une racine de $3x^2 - 4x + 1$
On peut utiliser le produit des racines soit $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$
donc $x_2 = \dfrac{1}{3}$

2. $-2x^2 + 4x - 7$

☛ **Solution**:

Ici on a $a = -2$, $b = 4$ et $c = -7$
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-7) = -40$
donc $-2x^2 + 4x - 7$ n'admet aucune racine
et est du signe de $a = -2$ coefficient de x^2
donc $-2x^2 + 4x - 7$ est du signe de $a = -2$ coefficient de x^2 pour tout réel x.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 7$		$-$ signe de a=-2	

Pour tout réel x, $-2x^2 + 4x - 7 < 0$

3. $x^2 - 6x + 9$

☛ **Solution**:

Ici on a $a = 1$, $b = -6$ et $c = 9$
$\Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$
donc $x^2 - 6x + 9$ admet une seule racine (racine double)
$x_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$
donc $x^2 - 6x + 9$ est du signe de $a = 1$ coefficient de x^2

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$		+ signe de a= 1	0	+ signe de a= 1	

$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ x^2 - 6x + 9 \geq 0}$

1.4.2 Inéquations du second degré

réf 645- inéquations du second degré

Exercice 9 : inéquations simples

Résoudre les inéquations suivantes

1. $x^2 - 4x + 3 > 0$

☛ **Solution**:

Ici on a $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$
Etude du signe de $x^2 - 4x + 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$ signe de a= 1	0	$-$ signe de $-$a=$-$1	0	$+$ signe de a= 1	

valeurs de x pour lesquelles le polynôme est de signe positif

le polynôme est de signe positif

$x^2-4x+3>0$ pour $x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

$\boxed{S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[}$

Remarque

On pouvait éviter de calculer Δ.
La somme des coefficients est nulle, $a+b+c=0$
donc $x_1=1$ est une racine de x^2-4x+3
On peut utiliser le produit des racines soit $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$
donc $x_2=\dfrac{3}{1}=3$

2. $-2x^2+5x-2>0$

☛ **Solution**:

Ici on a $a=-2$, $b=5$ et $c=-2$
$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-2)\times(-2)=25-16=9$
$\Delta>0$ donc il y a deux racines :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-3}{-4}=\dfrac{-8}{-4}=2$
et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+3}{-4}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$
Etude du signe de $-2x^2+5x-2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-2x^2+5x-2$		$-$ signe de a= $-$2	0	$+$ signe de $-$a= 2	0	$-$ signe de a= $-$2	

valeurs de x pour lesquelles le polynôme est de signe positif

le polynôme est de signe positif

$x^2-4x+3>0$ pour $x\in\left]\dfrac{1}{2};2\right[$

$\boxed{S=\left]\dfrac{1}{2};2\right[}$

3. $-2x^2+5x-4>0$

☛ **Solution**:

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times(-2)\times(-4) = 25-32 = -7$
$\Delta < 0$ donc il n'y a aucune racine
et $-2x^2+5x-4$ est du signe de $a=-2$ coefficient de x^2 soit :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-2x^2+5x-4$	$-$ signe de a= -2

donc $-2x^2+5x-4$ est toujours strictement négatif et cette inéquation n'admet aucune solution.

$\boxed{S=\emptyset}$

Exercice 10 : inéquations avec calculs

Méthode : résolution d'inéquations du second degré

➢ Développer puis "transformer" pour avoir un second membre égal à 0

➢ Simplifier pour se ramener à un polynôme du second degré

➢ Calculer Δ et dresser le tableau de signes de $f(x)$

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $(x+1)^2 \leq 2x+3$

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 \leq 2x+3 &\Longleftrightarrow x^2+2x+1 \leq 2x+3\\ &\Longleftrightarrow x^2+2x+1-2x-3 \leq 0\\ &\Longleftrightarrow x^2-2 \leq 0\end{aligned}$$

Recherche des racines de x^2-2
Ici le coefficient de x est nul donc $b=0$
On peut donc déterminer les racines de x^2-2 sans calculer le discriminant Δ
$x^2-2=0 \Longleftrightarrow x^2=2 \Longleftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou bien $x=-\sqrt{2}$

Remarque

En cherchant les racines avec le discriminant Δ penser que le coefficient $b=0$
Signe de x^2-2

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$ signe de a= 1	0	$-$ signe de $-$a=$-$1	0	$+$ signe de a= 1	

valeurs de x pour lesquelles le polynôme est de signe positif

le polynôme est de signe positif

$\boxed{(x+1)^2 \leq 2x+3 \text{ pour } x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[}$

$\boxed{S =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[}$

2. $2x^2 - 3x + 1 < x^2 - 1$

☛ **Solution**:

$2x^2 - 3x + 1 < x^2 - 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 1 < 0 \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$
Recherche des racines de $x^2 - 3x + 2$
$x_1 = 1$ est une racine de $x^2 - 3x + 2$ car $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$.
Le produit des deux racines est $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.
donc $1 \times x_2 = \dfrac{2}{1} = 2$ donc $x_2 = 2$
Signe de $x^2 - 3x + 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$ signe de a= 1	0	$-$ signe de −a=−1	0	$+$ signe de a= 1	

valeurs de x pour lesquelles le polynôme est de signe positif
le polynôme est de signe positif

$\boxed{2x^2 - 3x + 1 > x^2 - 1 \text{ pour } x \in]1; 2[}$

$\boxed{S =]1; 2[}$

Remarque
On peut aussi déterminer les racines en calculant $\Delta = 1$

3. $-2x^2 + 4x > (2x-1)^2 + 3$

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}
-2x^2 + 4x > (2x-1)^2 + 3 &\Longleftrightarrow -2x^2 + 4x > 4x^2 - 4x + 1 + 3 \\
&\Longleftrightarrow -2x^2 + 4x - 4x^2 + 4x - 4 > 0 \\
&\Longleftrightarrow -6x^2 + 8x - 4 > 0 \\
&\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-6) \times (-4) = 64 - 96 = -32
\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc $-6x^2 + 8x - 4$ n'admet aucune racine
donc $-6x^2 + 8x - 4$ est du signe de $a = -6$ coefficient de x^2 pour tout réel x.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-6x^2+8x-4$	$-$ signe de a$=-6$

Il n'y a aucune solution soit $S = \emptyset$