



---

## Mention légales

- Éditeur  
LECARPENTIER Jean-François avenue d'Agde 34810 Pomérols
- Siret 80383013200012
- Code ISBN : 9781707493623
- Dépôt légal décembre 2019
- Imprimé à la demande par AMAZON
- Contact : [contact-info@maths-lycee.fr](mailto:contact-info@maths-lycee.fr)
- MATHS-LYCEE.FR est propriétaire des droits de propriété intellectuelle ou détient les droits d'usage sur tous les documents du présent recueil.
- Toute reproduction, représentation, modification, publication, adaptation de tout ou partie des éléments du recueil, quel que soit le moyen ou le procédé utilisé, est interdite, sauf autorisation écrite préalable de l'auteur
- Toute **exploitation non autorisée** du recueil ou de l'un quelconque des éléments qu'il contient sera considérée comme constitutive d'une contrefaçon et poursuivie conformément aux dispositions des articles L.335-2 et suivants du Code pénal



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>5</b>
<b>A lire impérativement avant de commencer</b>	<b>7</b>
<b>1 Second degré</b>	<b>9</b>
1.1 Forme canonique . . . . .	10
1.2 Variations . . . . .	13
1.3 Racines . . . . .	15
1.3.1 Discriminant et racines . . . . .	15
1.3.2 Somme et produit des racines . . . . .	16
1.3.3 Cas où le calcul du discriminant est inutile . . . . .	17
1.3.4 Équations . . . . .	19
1.4 Signe-inéquations . . . . .	20
1.4.1 Tableau de signes d'un polynôme de degré 2 . . . . .	20
1.4.2 Inéquations du second degré . . . . .	22
<b>2 Dérivation</b>	<b>27</b>
2.1 Taux de variation et nombre dérivé . . . . .	28
2.1.1 Calcul du nombre dérivé . . . . .	28
2.1.2 Lecture graphique du nombre dérivé . . . . .	29
2.1.3 Équation d'une tangente . . . . .	32
2.2 Calculs de dérivées . . . . .	34
2.3 Dérivée de $f(ax + b)$ . . . . .	40
2.4 Signe de la dérivée et variations . . . . .	41
<b>3 Suites</b>	<b>47</b>
3.1 Forme explicite et relation de récurrence . . . . .	48
3.2 Variations d'une suite . . . . .	50
3.3 Suites arithmétiques . . . . .	52
3.3.1 Calculs avec les suites arithmétiques . . . . .	52
3.3.2 Somme des termes d'une suite arithmétique . . . . .	56
3.4 Suites géométriques . . . . .	57
3.4.1 Calculs avec les suites géométriques . . . . .	57
3.4.2 Somme des termes d'une suite géométrique . . . . .	60
3.5 Synthèse . . . . .	62
<b>4 Exponentielle</b>	<b>67</b>
4.1 Propriétés algébriques . . . . .	68
4.2 Calculs de dérivées . . . . .	70
4.3 Étude des variations avec la fonction exponentielle . . . . .	73



<b>5</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>77</b>
5.1	cosinus et sinus . . . . .	78
5.2	Angles associés . . . . .	82
5.3	Équations trigonométriques . . . . .	87
5.4	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>99</b>
6.1	Rappels de seconde : coordonnées d'un vecteur et distances . . . . .	100
6.2	Produit scalaire(définition) . . . . .	105
6.3	Produit scalaire avec le projeté orthogonal . . . . .	107
6.4	Produit scalaire avec les normes des vecteurs . . . . .	110
6.5	Produit scalaire dans un repère orthonormé . . . . .	111
6.6	Propriétés . . . . .	113
6.7	Exercices d'application dans un triangle . . . . .	116
6.7.1	Calcul d'une longueur dans un triangle . . . . .	116
6.7.2	Calcul d'un angle dans un triangle . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Droites et cercles</b>	<b>125</b>
7.1	Équation réduite d'une droite . . . . .	126
7.2	Équation cartésienne d'une droite . . . . .	132
7.3	Droites parallèles et perpendiculaires . . . . .	137
7.3.1	Droites parallèles . . . . .	137
7.3.2	Droites perpendiculaires . . . . .	141
7.4	Équation d'un cercle . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Probabilités</b>	<b>149</b>
8.1	Notations et rappels de seconde . . . . .	150
8.2	Probabilité conditionnelle . . . . .	150
8.3	Probabilités totales . . . . .	156
8.4	Événements indépendants . . . . .	161
8.5	Variable aléatoire et espérance . . . . .	161
8.5.1	Loi de probabilité . . . . .	161
8.5.2	Espérance et écart type . . . . .	163
<b>9</b>	<b>Compléments : algorithmes et python</b>	<b>167</b>
9.1	Variables et opérations sur les nombres avec Python . . . . .	167
9.2	Variables . . . . .	167
9.3	Comparaison de nombres . . . . .	168
9.4	Manipuler les nombres . . . . .	168
9.5	Test Si....ALORS....SINON . . . . .	168
9.6	Boucles POUR . . . . .	169
9.7	Boucles TANT QUE . . . . .	170

# Préface

Cet ouvrage permet aux élèves de première spécialité mathématiques **de se familiariser avec les notions essentielles du programme 2019**.

Il a été conçu dans le but **de revoir et appliquer directement chaque notion au programme** de première sur des exemples simples en tenant compte des difficultés rencontrées le plus souvent chez les élèves de première.

**Les vidéos** associées aux exercices d'application permettent une approche plus ludique et d'avoir des explications complémentaires à celles de la version écrite d'un exercice.

Vous aurez accès aux exercices plus complets et de recherche sur le site [MATHS-LYCEE.FR](http://MATHS-LYCEE.FR) associé à ce livre.



# A lire impérativement avant de commencer

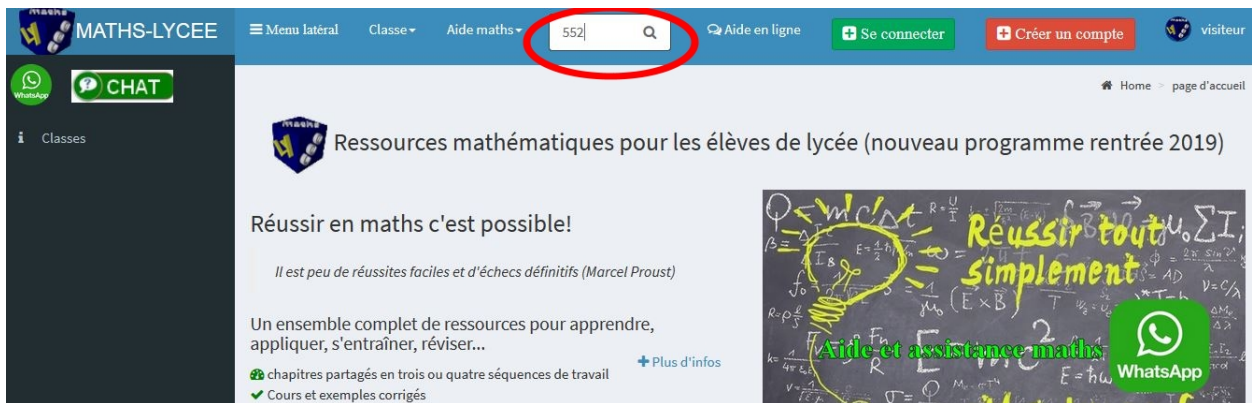
## MODE d'emploi et liens vidéos

Pour chaque section, vous trouverez un rappel de cours et un ou plusieurs exercices d'application directe du cours.

Les **références des vidéos** permettent d'accéder directement à la vidéo (utilisation du document PDF) ou bien d'accéder à la vidéo avec sa référence (version imprimée).

Accès à une vidéo avec sa référence :

- lien sur le site MATHS-LYCEE.FR
- Pour accéder directement à la vidéo avec sa référence, taper le numéro de la vidéo dans la barre de recherche :



The screenshot shows the homepage of the MATHS-LYCEE.FR website. The header is blue and contains the site logo, navigation links like 'Menu latéral', 'Classe', and 'Aide maths', a search bar with '552' entered and highlighted by a red circle, and buttons for 'Aide en ligne', 'Se connecter', 'Créer un compte', and 'visiteur'. The main content area has a light blue background with the heading 'Ressources mathématiques pour les élèves de lycée (nouveau programme rentrée 2019)'. Below this, there is a motivational quote: 'Réussir en maths c'est possible! Il est peu de réussites faciles et d'échecs définitifs (Marcel Proust)'. A large graphic on the right features mathematical formulas and the text 'Réussir tout simplement' and 'Aide et assistance maths' with a WhatsApp logo.





# Chapitre 1

## Second degré

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Taux de variation et nombre dérivé</b>	<b>28</b>
2.1.1	Calcul du nombre dérivé	28
2.1.2	Lecture graphique du nombre dérivé	29
2.1.3	Équation d'une tangente	32
<b>2.2</b>	<b>Calculs de dérivées</b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Dérivée de <math>f(ax + b)</math></b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Signe de la dérivée et variations</b>	<b>41</b>

---



## 1.1 Forme canonique



### Mémo : variations

$P$  est une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels et  $a \neq 0$

$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  est la forme canonique de  $P$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = P(\alpha)$



réf 639-Déterminer la forme canonique



### Exercice 1 déterminer la forme canonique connaissant la fonction

Pour chacun des cas ci-dessous,  $f$  est une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  et on note  $\mathcal{P}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

Donner les coordonnées du sommet de  $\mathcal{P}$  puis donner la forme canonique de  $f$ .

1.  $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$

• Solution:

$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 3, b = -12$  et  $c = 5$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\beta = f(\alpha) = 3 \times (2)^2 - 12 \times (2) + 5 = 12 - 24 + 5 = -7$$

Le sommet de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S(2; -7)$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 3(x - 2)^2 - 7$



$$x = \alpha = x - (-2) = x + 2$$

2.  $f(x) = 2x^2 - 16x + 7$

• Solution:

$f(x) = 2x^2 - 16x + 7$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 2, b = -16$  et  $c = 7$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-16)}{2 \times 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\beta = f(\alpha) = f(4) = 2 \times 4^2 - 16 \times 4 + 7 = 32 - 64 + 7 = -25$$

Le sommet S de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S(4; -25)$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x - 4)^2 - 25$



3.  $f(x) = -10x - x^2 + 1$

• Solution:



les termes de  $f(x)$  ne sont pas ordonnés selon les puissances décroissantes de  $x$

Commencer par écrire  $f(x)$  sous la forme  $ax^2 + bx + c$  et identifier les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f(x) = -10x - x^2 + 1 = -x^2 - 10x + 1$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = -1$ ,  $b = -10$  et  $c = 1$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{-2} = -5$$

$$\beta = f(\alpha) = f(-5) = -(-5)^2 - 10 \times (-5) + 1 = -25 + 50 + 1 = 26$$

Le sommet S de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S(-5; 26)$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = -(x + 5)^2 + 26$



$\alpha = -5$  donc  $x - \alpha = x - (-5) = x + 5$



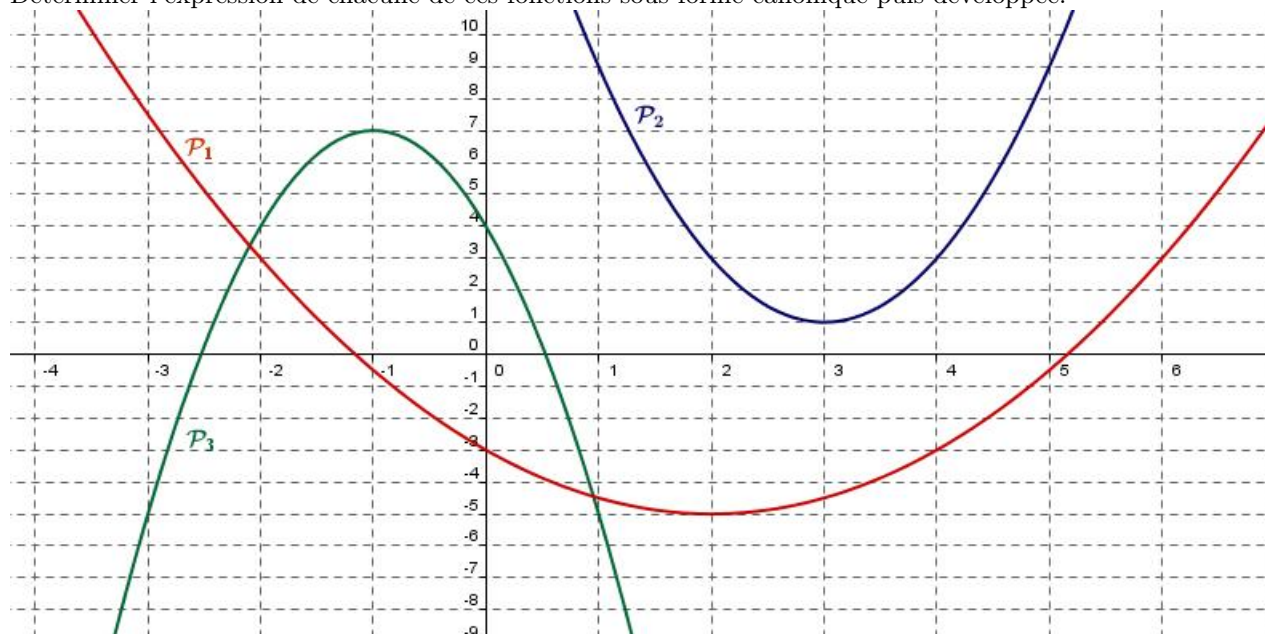
réf 641-Déterminer la forme canonique à partir du graphique



**Exercice 2 déterminer la forme canonique connaissant la parabole**

On donne ci-dessous les représentations graphiques  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  respectivement des fonctions polynôme de degré 2  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions sous forme canonique puis développée.





1. Pour  $f_1$  :

• **Solution:**

On pose  $f_1(x) = a_1(x - \alpha_1)^2 + \beta_1$

Pour la parabole  $\mathcal{P}_1$ , on a  $a_1 > 0$  (parabole orientée vers le haut) et le sommet  $S_1$  a pour coordonnées  $(2; -5)$

On a donc  $\alpha_1 = 2$  et  $\beta_1 = -5$

donc  $f_1(x) = a_1(x - 2)^2 - 5$

La parabole  $\mathcal{P}_1$  passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0; -3)$  par exemple

donc  $f_1(0) = -3$

donc  $f_1(0) = a_1(0 - 2)^2 - 5 = -3$  (on remplace  $x$  par 0 dans l'expression de  $f_1$ )

$$a_1(0 - 2)^2 - 5 = -3 \iff 4a_1 = 2 \iff a_1 = \frac{1}{2}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 5$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 - 5$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - 3$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5 = \frac{x^2}{2} - 2x - 3$$



## 1.2 Variations



### Mémo : variations

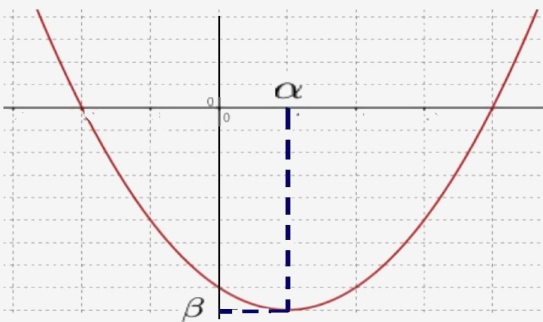
$P$  est une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels et  $a \neq 0$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées  $S(\alpha; \beta)$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .

On a alors deux cas possibles  $a > 0$  et  $a < 0$  :

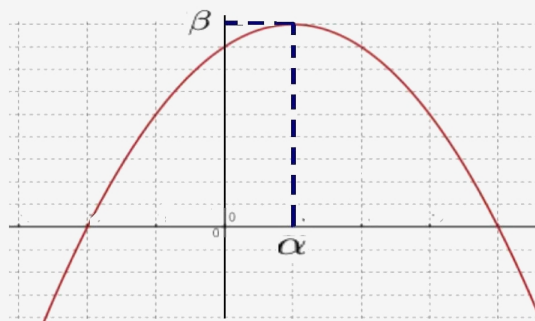
**Cas  $a > 0$**

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\beta$	$+\infty$



**Cas  $a < 0$**

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\beta$	$-\infty$



réf 640-sommet de la parabole et tableau de variation



### Exercice 3 dresser le tableau de variation connaissant la fonction

Pour chacun des cas ci-dessous,  $f$  est une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  et on note  $\mathbb{P}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

Dresser le tableau de variation de  $f$

1.  $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

• **Solution:**

$f(x) = 2x^2 - 8x + 1$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 2, b = -8$  et  $c = 1$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$$



$$\beta = f(\alpha) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x - 2)^2 - 7$  et le sommet S de la parabole a pour coordonnées  $S(2; -7)$

Le sommet S de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S(2; -7)$

Le coefficient  $a$  de  $x^2$  est positif donc la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; 2[$  et croissante sur  $]2; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x)$			

2.  $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

• **Solution:**

$f(x) = -3x^2 + 6x - 2$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = -3$ ,  $b = 6$  et  $c = -2$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$\beta = f(\alpha) = f(1) = -3 + 6 - 2 = 1$$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = -3(x - 1)^2 + 1$  et le sommet S de la parabole a pour coordonnées  $S(1; 1)$

Le sommet S de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S(1; 1)$

Le coefficient  $a$  de  $x^2$  est négatif donc la fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 1[$  et décroissante sur  $]1; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$			

3.  $f(x) = 10x + 3 - 2x^2$

• **Solution:**

$f(x) = 10x + 3 - 2x^2 = -2x^2 + 10x + 3$  est un polynôme de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = -2$ ,  $b = 10$  et  $c = 3$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -2 \times \frac{25}{4} + 10 \times \frac{5}{2} + 3 = \frac{-25}{2} + 25 + 3 = \frac{31}{2}$$

La forme canonique de  $f$  est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{31}{2}$  et le sommet S de la parabole a pour coordonnées  $S\left(\frac{5}{2}; \frac{31}{2}\right)$



Le sommet S de  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $S\left(\frac{5}{2}; \frac{31}{2}\right)$

Le coefficient  $a$  de  $x^2$  est négatif donc la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$  et décroissante sur  $]\frac{5}{2}; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{31}{2}$	

## 1.3 Racines

### 1.3.1 Discriminant et racines



#### Mémo : racine

$P(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ),  $x_1$  est une racine de  $P$  si et seulement si  $P(x_1) = 0$



#### Mémo : discriminant-racines

$P(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ )

Le nombre réel noté  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé discriminant de  $P$ .

- ☐ Si  $\Delta > 0$  il y a deux racines

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ☐ Si  $\Delta = 0$ , il y a une racine  $x_1 = \frac{-b}{2a}$

- ☐ Si  $\Delta < 0$  il n'y a aucune racine

#### Exercice 4 : Déterminer les racines de chaque polynôme si elles existent

Déterminer si elles existent, les racines des polynômes de degré 2 ci-dessous :

1.  $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$

• **Solution:**

Ici, on a  $a = 2$ ,  $b = -4$  et  $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$$

$\Delta > 0$  donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{64}}{4} = \frac{4 - 8}{4} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{64}}{4} = \frac{4 + 8}{4} = 3$$

Les racines de  $P(x)$  sont  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 3$

**Remarque**

Cela signifie que  $P(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$  et que  $P(3) = 0$

Quand le coefficient  $b$  est négatif, attention à bien écrire  $(b)^2$

En effet  $-4^2 = -16$  mais  $(-4)^2 = +16$  (la deuxième écriture est correcte pour le calcul de  $\Delta$ )

Penser à vérifier les calculs avec le MENU EQUATION de la calculatrice

2.  $P(x) = -3x^2 + 5x - 3$

☛ **Solution:**

Ici, on a  $a = -3$ ,  $b = 5$  et  $c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 25 - 36 = -11$$

$\Delta < 0$  donc  $P(x)$  n'admet pas de racines.

$P(x)$  n'admet aucune racine. ( $\Delta < 0$ )

3.  $P(x) = 12x - 2x^2 - 18$

☛ **Solution:**

les termes ne sont pas ordonnés selon les puissances décroissantes de  $x$ .

On a donc  $P(x) = -2x^2 + 12x - 18$

Ici, on a  $a = -2$ ,  $b = 12$  et  $c = -18$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times (-2) \times (-18) = 144 - 144 = 0$$

$\Delta = 0$  donc  $P(x)$  n'admet qu'une seule racine (racine double).

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$P(x)$  admet pour racine  $x_1 = 3$ .

### 1.3.2 Somme et produit des racines



## Mémo : somme et produit des racines

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (avec } a \neq 0\text{)}$$

Si le polynôme admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$  alors  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$  et  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

**Remarque**

Si la somme des coefficients est égale à 0 alors  $x_1 = 1$  est une racine du polynôme.

📖 réf 605 produit des racines

### Exercice 5 utiliser le produit des racines





1. Déterminer les racines de  $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$  sans calculer le discriminant.

• **Solution:**

On a  $a = 3$ ,  $b = -5$  et  $c = 2$  donc  $a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0$

donc  $P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$

donc  $x_1 = 1$  est une racine de  $P$ .

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  soit  $1x_2 = \frac{2}{3}$

donc  $x_2 = \frac{2}{3}$

Les racines de  $P$  sont  $x_1 = 1$  et  $x_2 = \frac{2}{3}$ .

2. En remarquant que  $x_1 = 2$  est une racine de  $P(x) = 2x^2 - 500x + 992$ , déterminer les racines de  $P$ .

• **Solution:**

$P(2) = 2 \times 2^2 - 500 \times 2 + 992 = 8 - 1000 + 992 = 0$

donc  $x_1 = 2$  est une racine de  $P$ .

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  donc  $2x_2 = \frac{992}{2}$  donc  $x_2 = \frac{992}{2 \times 2} = \frac{992}{4} = 248$

Les racines de  $P$  sont  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 248$ .

### 1.3.3 Cas où le calcul du discriminant est inutile



#### Mémo : cas où l'on peut éviter le calcul de $\Delta$

❑ cas où  $b = 0$

On peut "isoler"  $x^2$  :  $ax^2 + c = 0 \iff x^2 = \frac{-c}{a}$

❑ Cas où  $c = 0$

On peut factoriser  $x$  :  $ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \iff x = 0$  ou  $ax + b = 0$

❑ Cas où l'on peut trouver une racine "simple" (voir section précédente)

On utilise  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$



réf 605-racines sans calculer le discriminant



#### Exercice 6 : recherche des racines sans calculer $\Delta$

Déterminer si elles existent, les racines des polynômes de degré 2 sans calculer le discriminant ( $\Delta$ )



1.  $P(x) = 2x^2 - 18$

• Solution:

On est dans le cas où  $b = 0$

$$2x^2 - 18 = 0 \iff 2x^2 = 18$$

$$\iff x^2 = 9$$

$$\iff x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$

$$\iff x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Les racines de  $P$  sont  $x_1 = 3$  et  $x_2 = -3$ .

2.  $P(x) = 3x^2 + 8$

• Solution:

On est dans le cas où  $b = 0$

$$3x^2 + 8 = 0 \iff 3x^2 = -8$$

$$\iff x^2 = \frac{-8}{3}$$

$x^2 \geq 0$  donc cette équation n'admet aucune solution.

$P$  n'admet aucune racine.

3.  $P(x) = -2x^2 + 8x$

• Solution:

On est dans le cas où  $c = 0$

$$-2x^2 + 8x = 0 \iff x(-2x + 8) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } -2x + 8 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 4$$

$P$  admet donc deux racines  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 4$ .

4.  $P(x) = x^2 - 4x + 3$

• Solution:

On a  $a = 1$ ,  $b = -4$  et  $c = 3$

et la somme des coefficients de  $P(x)$  est égale à 0.

$$\text{donc } P(1) = a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$$

donc  $x_1 = 1$  est une racine de  $P(x)$

Si on note  $x_2$  la seconde racine de  $P(x)$ , on a alors :

$$x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 3 \text{ donc } x_2 = 3$$

Les racines de  $P$  sont  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 3$



### 1.3.4 Équations

✦ Méthode : résolution d'une équation du second degré

- Il faut avoir 0 dans le membre de gauche
- Développer et simplifier pour se ramener à une équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$
- rappel :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ( $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ )  $\iff ad = bc$  (produits en croix égaux)

 réf 607-équations du second degré



#### Exercice 7 : équations simples

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :



penser à contrôler les résultats avec la calculatrice

1.  $2x^2 - 6x = -7$

• **Solution:**

$$2x^2 - 6x = -7 \iff 2x^2 - 6x + 7 = 0$$

Ici, on a  $a = 2$ ,  $b = -6$  et  $c = +7$

$\Delta < 0$  donc il n'y a aucune solution

$$S = \emptyset$$

2.  $(2x - 1)^2 = 5 - 4x$

• **Solution:**

$$(2x - 1)^2 = 5 - 4x$$

$$\iff 4x^2 - 4x + 1 = 5 - 4x$$

$$\iff 4x^2 - 4x + 1 - 5 + 4x = 0$$

$$\iff 4x^2 - 4 = 0$$

$$\iff x^2 = 1$$

$$\iff x = \sqrt{1} = 1 \text{ ou bien } x = -\sqrt{1} = -1$$

Les solutions de l'équation sont  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -1$

$$S = \{-1 ; 1\}$$



3.  $(2x + 1)^2 = 1 - (3x + 2)^2$

• Solution:

$$\begin{aligned}
 (2x + 1)^2 = 1 - (3x + 2)^2 &\iff 4x^2 + 4x + 1 = 1 - (9x^2 + 12x + 4) \\
 &\iff 4x^2 + 4x + 1 = 1 - 9x^2 - 12x - 4 \\
 &\iff 4x^2 + 4x + 1 - 1 + 9x^2 + 12x + 4 = 0 \\
 &\iff 13x^2 + 16x + 4 = 0
 \end{aligned}$$

Ici  $a = 13$ ,  $b = 16$  et  $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (16)^2 - 4 \times 13 \times 4 = 48$

$\Delta > 0$  donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{48}}{26} = \frac{-16 - \sqrt{16 \times 3}}{26} = \frac{-16 - 4\sqrt{3}}{26} = \frac{4(-4 - \sqrt{3})}{26}$

soit  $x_1 = \frac{2(-4 - \sqrt{3})}{13} = \frac{-8 - 2\sqrt{3}}{13}$

et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{48}}{26} = \frac{-16 + 4\sqrt{3}}{26} = \frac{-8 + 2\sqrt{3}}{13}$

Les solutions de l'équation sont  $x_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{3}}{13}$  et  $x_2 = \frac{-8 + 2\sqrt{3}}{13}$

$$S = \left\{ \frac{-8 - 2\sqrt{3}}{13} ; \frac{-8 + 2\sqrt{3}}{13} \right\}$$

Penser à vérifier les solutions avec le MENU EQUATION de la calculatrice.

### 1.4 Signe-inéquations

#### Mémo signe de $ax^2 + bx + c$

$\Delta > 0$ <small>forme factorisée</small> $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$\Delta = 0$ <small>forme factorisée</small> $f(x) = a(x - x_1)^2$	$\Delta < 0$ <small>pas de racines réelles</small>																								
<table border="1"> <tr><th><math>x</math></th><th><math>-\infty</math></th><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>+\infty</math></th></tr> <tr><td>signe</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	signe	+	-	-	+	<table border="1"> <tr><th><math>x</math></th><th><math>-\infty</math></th><th><math>x_1 = x_2</math></th><th><math>+\infty</math></th></tr> <tr><td>signe</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$	signe	+	-	+	<table border="1"> <tr><th><math>x</math></th><th><math>-\infty</math></th><th><math>+\infty</math></th></tr> <tr><td>signe</td><td>+</td><td>+</td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	signe	+	+
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																						
signe	+	-	-	+																						
$x$	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$																							
signe	+	-	+																							
$x$	$-\infty$	$+\infty$																								
signe	+	+																								

#### 1.4.1 Tableau de signes d'un polynôme de degré 2

 réf 643- signe de  $ax^2 + bx + c$



#### Exercice 8 : signe d'un polynôme de degré 2

Etudier le signe des polynôme de degré 2



1.  $3x^2 - 4x + 1$

• Solution:

Ici on a  $a = 3$ ,  $b = -4$  et  $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$$

$\Delta > 0$  donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{6} = 1$$

Etude du signe de  $3x^2 - 4x + 1$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$1$	$+\infty$	
$3x^2 - 4x + 1$	+	0	-	0	+
	signe de $a=3$		signe de $-a=-3$		signe de $a=3$

$3x^2 - 4x + 1$  est positif sur  $]-\infty; \frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$  et négatif sur  $]\frac{1}{3}; 1[$

**Remarque**

On pouvait éviter de calculer  $\Delta$ .

La somme des coefficients est nulle,  $a + b + c = 0$

donc  $x_1 = 1$  est une racine de  $3x^2 - 4x + 1$

On peut utiliser le produit des racines soit  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{donc } x_2 = \frac{1}{3}$$

2.  $-2x^2 + 4x - 7$

• Solution:

Ici on a  $a = -2$ ,  $b = 4$  et  $c = -7$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-7) = -40$$

donc  $-2x^2 + 4x - 7$  n'admet aucune racine

et est du signe de  $a = -2$  coefficient de  $x^2$

donc  $-2x^2 + 4x - 7$  est du signe de  $a = -2$  coefficient de  $x^2$  pour tout réel  $x$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 7$	-	
	signe de $a=-2$	

Pour tout réel  $x$ ,  $-2x^2 + 4x - 7 < 0$



3.  $x^2 - 6x + 9$

• **Solution:**

Ici on a  $a = 1$ ,  $b = -6$  et  $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$$

donc  $x^2 - 6x + 9$  admet une seule racine (racine double)

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

donc  $x^2 - 6x + 9$  est du signe de  $a = 1$  coefficient de  $x^2$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	$+$ signe de $a=1$	$0$	$+$ signe de $a=1$

Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

### 1.4.2 Inéquations du second degré

📺 réf 645- inéquations du second degré



#### Exercice 9 : inéquations simples

Résoudre les inéquations suivantes

1.  $x^2 - 4x + 3 > 0$

• **Solution:**

Ici on a  $a = 1$ ,  $b = -4$  et  $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

$\Delta > 0$  donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Etude du signe de  $x^2 - 4x + 3$



$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
	signe de $a=1$		signe de $-a=-1$		signe de $a=1$

— valeurs de  $x$  pour lesquelles le polynôme est de signe positif

— le polynôme est de signe positif

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ pour } x \in ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$$

$$S = ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$$

**Remarque**

On pouvait éviter de calculer  $\Delta$ .

La somme des coefficients est nulle,  $a + b + c = 0$

donc  $x_1 = 1$  est une racine de  $x^2 - 4x + 3$

On peut utiliser le produit des racines soit  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{donc } x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

2.  $-2x^2 + 5x - 2 > 0$

• **Solution:**

Ici on a  $a = -2$ ,  $b = 5$  et  $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$$

$\Delta > 0$  donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Etude du signe de  $-2x^2 + 5x - 2$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$	
$-2x^2 + 5x - 2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
	signe de $a=-2$		signe de $-a=2$		signe de $a=-2$

— valeurs de  $x$  pour lesquelles le polynôme est de signe positif

— le polynôme est de signe positif

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ pour } x \in \left] \frac{1}{2}; 2 \right[$$

$$S = \left] \frac{1}{2}; 2 \right[$$



3.  $-2x^2 + 5x - 4 > 0$

• **Solution:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 25 - 32 = -7$$

 $\Delta < 0$  donc il n'y a aucune racineet  $-2x^2 + 5x - 4$  est du signe de  $a = -2$  coefficient de  $x^2$  soit :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + 5x - 4$	- signe de $a = -2$	

donc  $-2x^2 + 5x - 4$  est toujours strictement négatif et cette inéquation n'admet aucune solution.

$$S = \emptyset$$

**Exercice 10 : inéquations avec calculs****Méthode : résolution d'inéquations du second degré**

- Développer puis "transformer" pour avoir un second membre égal à 0
- Simplifier pour se ramener à un polynôme du second degré
- Calculer  $\Delta$  et dresser le tableau de signes de  $f(x)$

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(x + 1)^2 \leq 2x + 3$

• **Solution:**

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 \leq 2x + 3 &\iff x^2 + 2x + 1 \leq 2x + 3 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 - 2x - 3 \leq 0 \\ &\iff x^2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

Recherche des racines de  $x^2 - 2$ Ici le coefficient de  $x$  est nul donc  $b = 0$ On peut donc déterminer les racines de  $x^2 - 2$  sans calculer le discriminant  $\Delta$ 

$$x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou bien } x = -\sqrt{2}$$

**Remarque**En cherchant les racines avec le discriminant  $\Delta$  penser que le coefficient  $b = 0$ Signe de  $x^2 - 2$ 

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+ signe de $a = 1$		- signe de $-a = -1$	+ signe de $a = 1$

— valeurs de  $x$  pour lesquelles le polynôme est de signe positif

— le polynôme est de signe positif





$$(x + 1)^2 \leq 2x + 3 \text{ pour } x \in ]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

$$S = ]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

2.  $2x^2 - 3x + 1 < x^2 - 1$

• **Solution:**

$$2x^2 - 3x + 1 < x^2 - 1 \iff 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 1 < 0 \iff x^2 - 3x + 2 < 0$$

Recherche des racines de  $x^2 - 3x + 2$

$x_1 = 1$  est une racine de  $x^2 - 3x + 2$  car  $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ .

Le produit des deux racines est  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

donc  $1 \times x_2 = \frac{2}{1} = 2$  donc  $x_2 = 2$

Signe de  $x^2 - 3x + 2$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
		] ]	[ [	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0
	signe de $a=1$	signe de $-a=-1$		signe de $a=1$

—valeurs de x pour lesquelles le polynôme est de signe positif

— le polynôme est de signe positif

$$2x^2 - 3x + 1 > x^2 - 1 \text{ pour } x \in ]1; 2[$$

$$S = ]1; 2[$$

**Remarque**

On peut aussi déterminer les racines en calculant  $\Delta = 1$

3.  $-2x^2 + 4x > (2x - 1)^2 + 3$

• **Solution:**

$$-2x^2 + 4x > (2x - 1)^2 + 3 \iff -2x^2 + 4x > 4x^2 - 4x + 1 + 3$$

$$\iff -2x^2 + 4x - 4x^2 + 4x - 4 > 0$$

$$\iff -6x^2 + 8x - 4 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-6) \times (-4) = 64 - 96 = -32$$

$\Delta < 0$  donc  $-6x^2 + 8x - 4$  n'admet aucune racine

donc  $-6x^2 + 8x - 4$  est du signe de  $a = -6$  coefficient de  $x^2$  pour tout réel  $x$ .



$x$	$-\infty$	$+\infty$
$-6x^2 + 8x - 4$	- signe de $a = -6$	

Il n'y a aucune solution soit  $S = \emptyset$